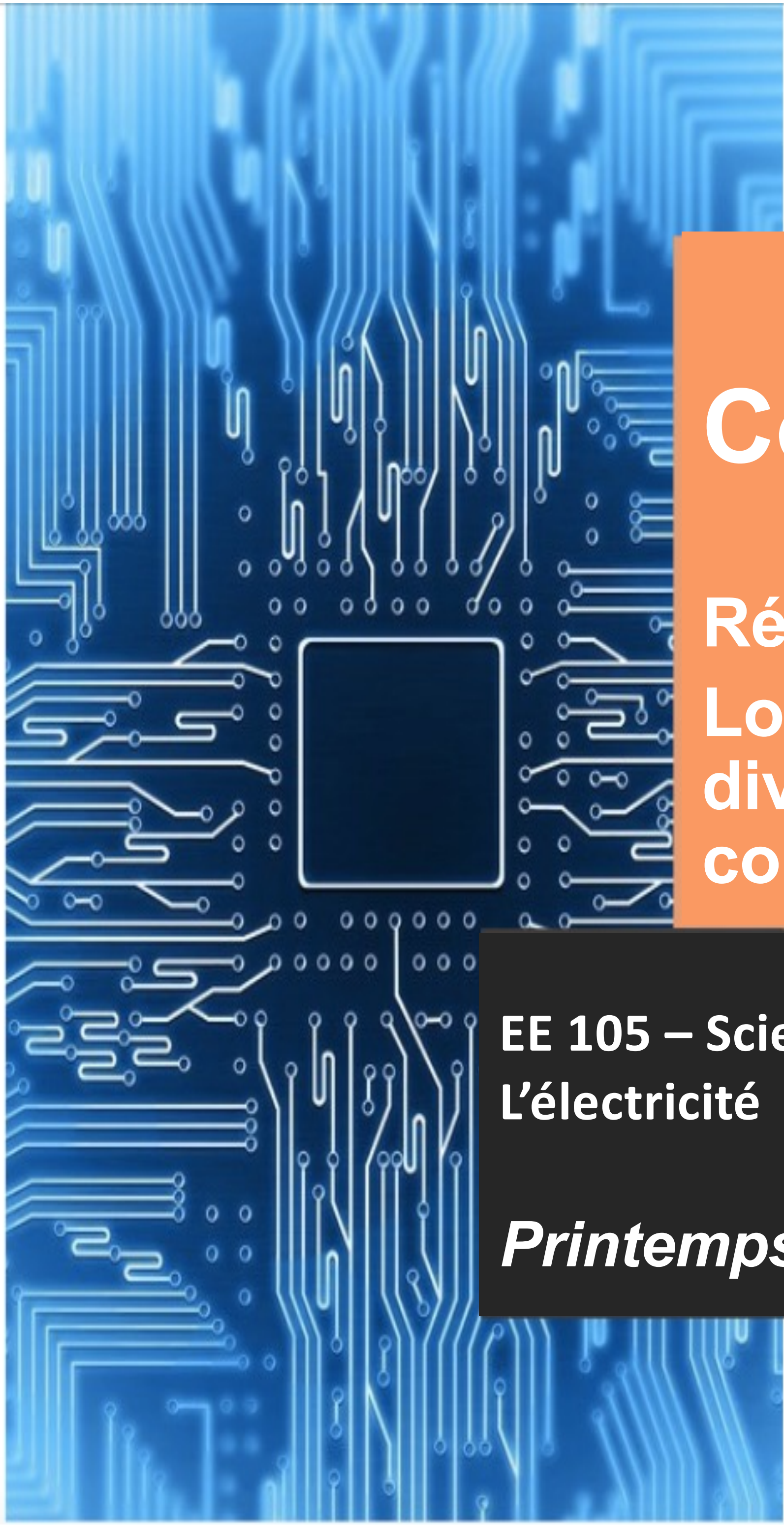
EPFL



Cours 9

Régime permanent sinusoïdal, Lois d’Ohm et de Kirchhoff, diviseur de tension et de courant, superposition

EE 105 – Sciences et Technologie de L’électricité

Printemps 2025

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Prof. Sandro Carrara - sandro.carrara@epfl.ch

Description .

- Aujourd'hui
  - Lois d'Ohm
  - Lois de Kirchhoff
  - Impédances en série et parallèle
  - Diviseurs de tension et de courant
  - Principe de superposition
  - Sections 7.1,7.2, 7.4

- Semaine prochaine
  - Les Filtres
  - comportement fréquentiel
  - Sections 7.3, 9.1, 9.2

A lire

Rappel - Définition:

- Les Phaseurs complexes dépendant du temps:

$$\underline{x}(t) = \hat{X}e^{j(\omega t+\varphi)} = \hat{X}e^{j(\omega t)}e^{j\varphi}$$ Phaseur dépendant du temps

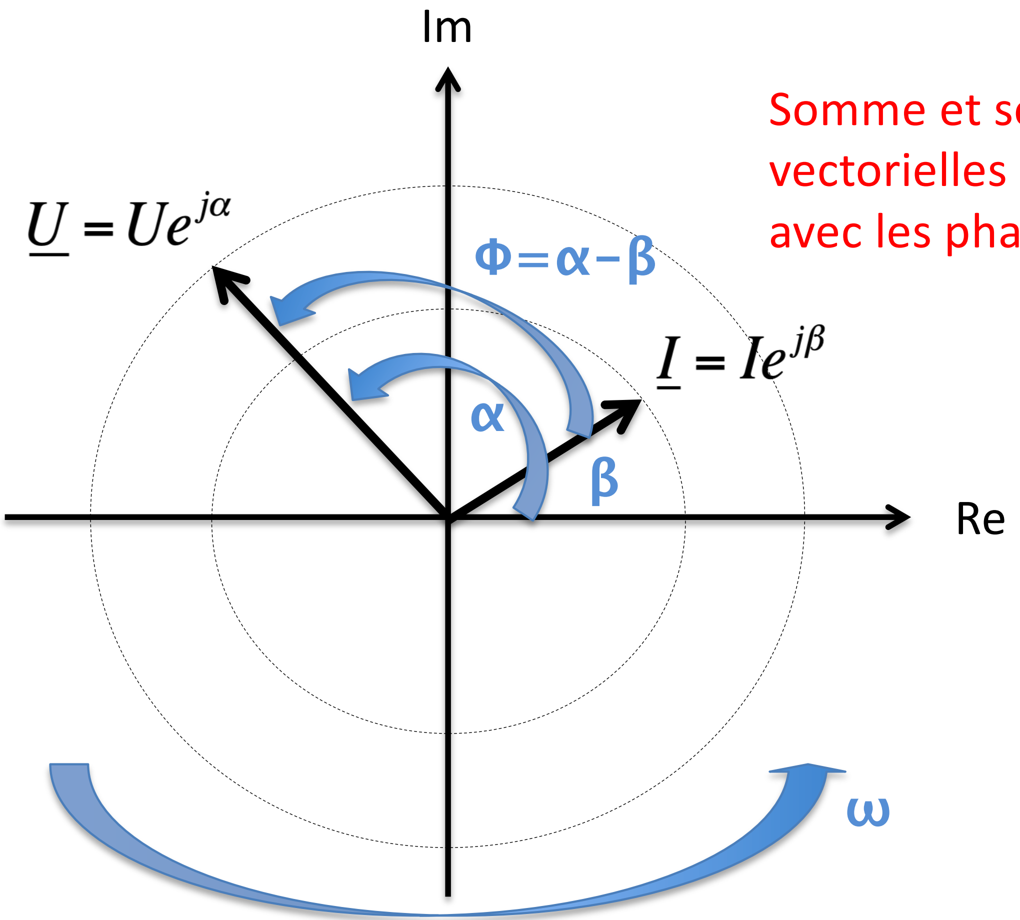
- Les Phaseurs de crête complexes et les Phaseurs efficaces complexes sont indépendants du temps:

$$\underline{\hat{X}} = \frac{\underline{x}}{e^{j(\omega t)}} = \hat{X}e^{j\varphi}$$ Phaseur de crête complexe

$$\underline{X} = \frac{\underline{x}}{\sqrt{2}e^{j(\omega t)}} = \frac{\hat{X}}{\sqrt{2}}e^{j\varphi} = Xe^{j\varphi}$$ Phaseur efficace complexe

Rappel - Définition:

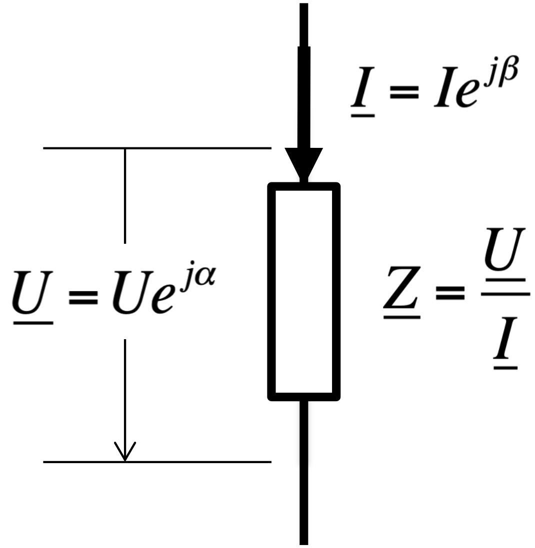
- Vecteurs de Fresnel



Somme et soustraction vectorielles sont disponibles avec les phaseurs!

Rappel - Définition:

- ***L'impédance*** complexe $\underline{Z}$ d'un dipôle associée à une fréquence donnée en régime permanent sinusoïdal est le quotient de la tension par le courant complexe

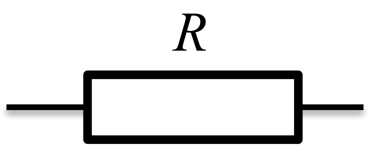


$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\alpha}}{Ie^{j\beta}} = \frac{U}{I} e^{j(\alpha-\beta)}$$

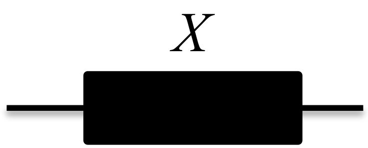
L'impédance gère directement le déphasage

Rappel - Définition:

- ***La Résistance*** d'une impédance est la partie réelle de l'impédance complexe ***Z***
- ***La Réactance*** d'une impédance est la partie imaginaire de l'impédance complexe ***Z***



$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = Z\cos\varphi + jZsin\varphi \rightarrow \begin{cases} R = Z\cos\varphi = \mathrm{Re}\left\{\bar{Z}\right\} & \text{Résistance} \\ X = Z\sin\varphi = \mathrm{Im}\left\{\bar{Z}\right\} & \text{Réactance} \end{cases}$$



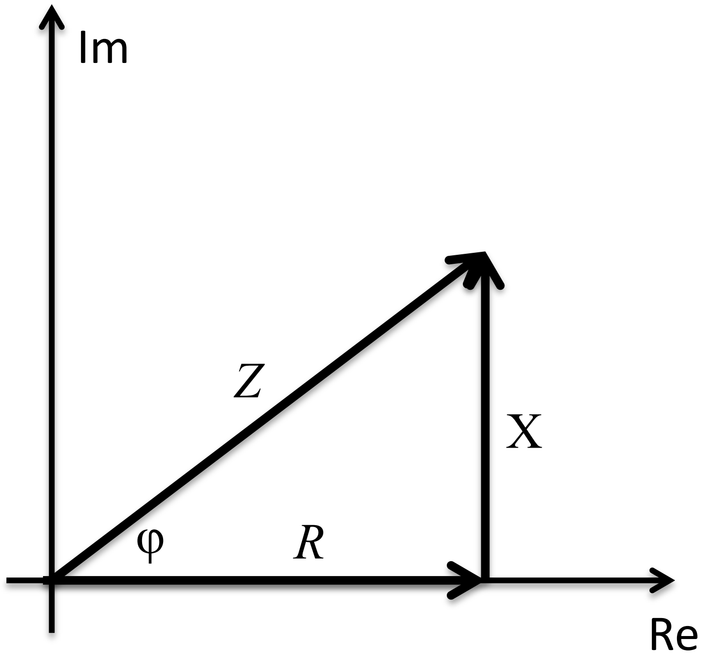
Commentaires:

- Résistance et Réactance nous donnent les valeurs du module et de la phase de l'impédance

$$\underline{Z} = R + jX \rightarrow \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{X}{R}\right) \end{cases}$$

Un déphasage non-nul signifie que la réactance est non-nulle

Le plan complexe

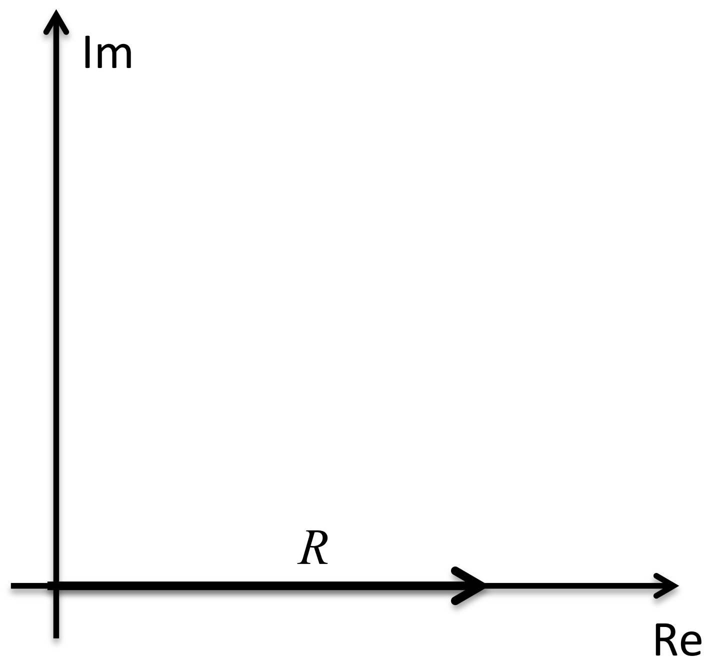


Rappel - La loi d'Ohm sur R,L,C

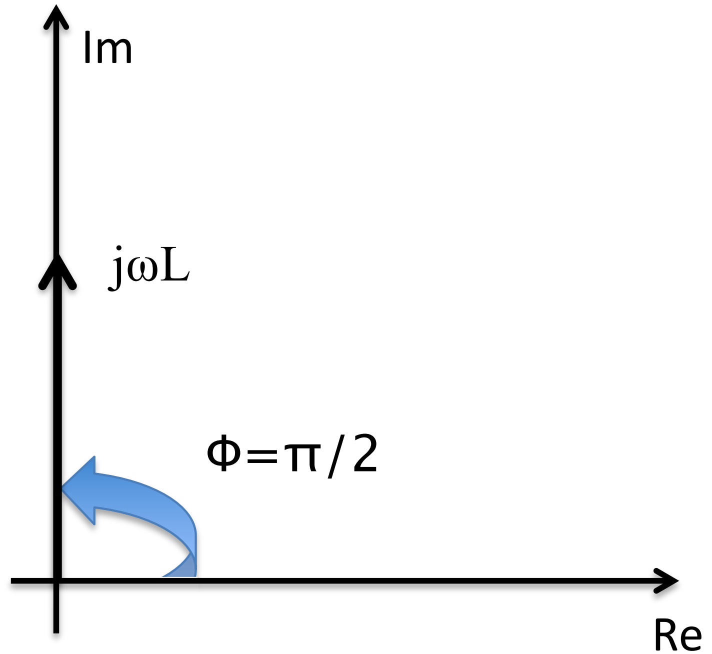
- En régime sinusoïdal, l'introduction du concept d'impédance permet de généraliser la loi d'Ohm pour tous les circuits contenant des éléments linéaires résistif, inductif, et capacitif.

$$\left.\begin{array}{l} \underline{U}_R = R\underline{I} \\ \underline{U}_L = j\omega L\underline{I} \\ \underline{U}_C = \dfrac{1}{j\omega C}\underline{I} \end{array}\right\} \rightarrow \underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}, \underline{Z} = R + jX$$

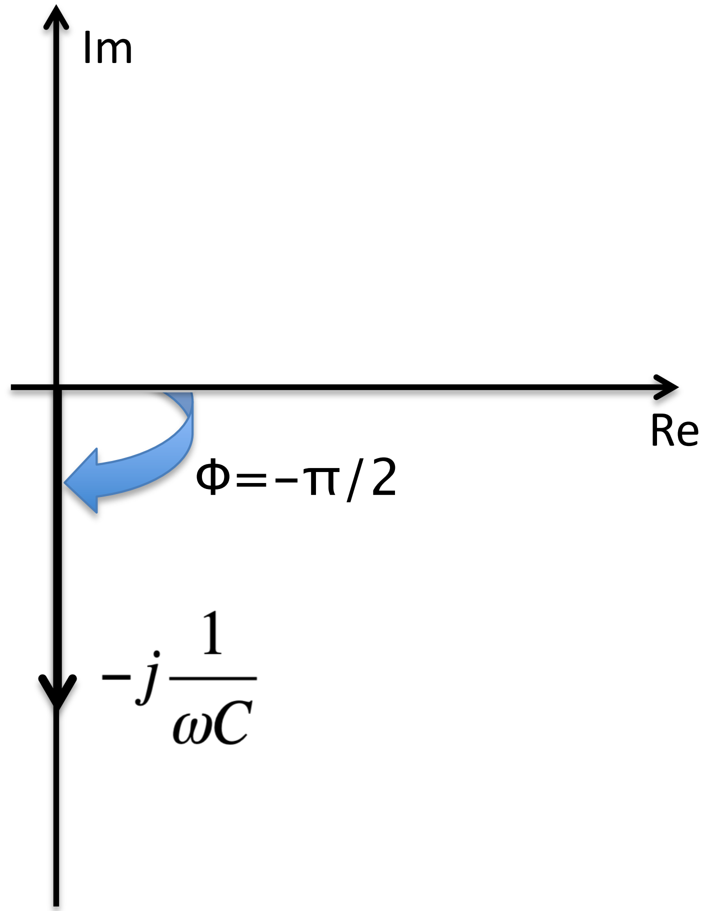
R sur le plan complexe



L sur le plan complexe



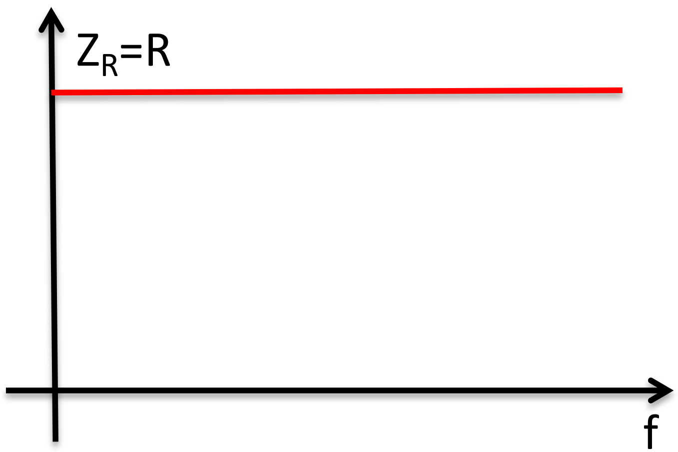
C sur le plan complexe

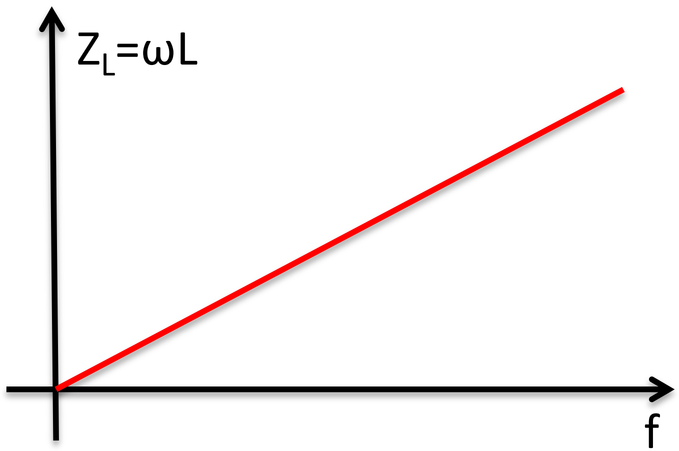


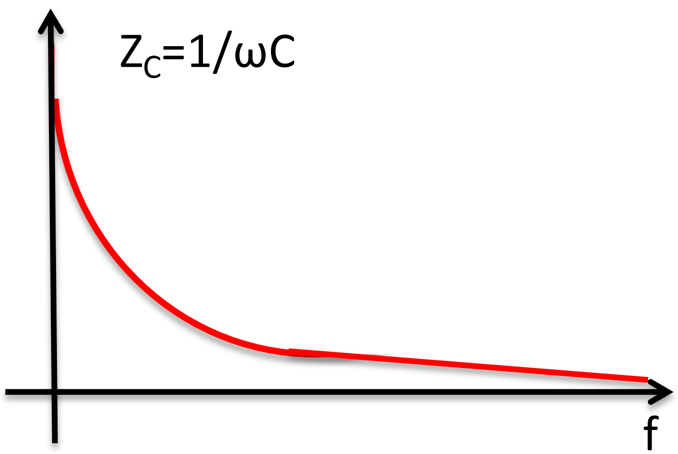
Comparaison directe entre R,L,C

	Re{$\underline{Z}$}	Im{$\underline{Z}$}	φ	$\underline{Z}$
R	R		0	R
L	0	ωL	π/2	jωL
C	0	-1/ωC	-π/2	1/jωC

Module d'impédance par rapport à la fréquence





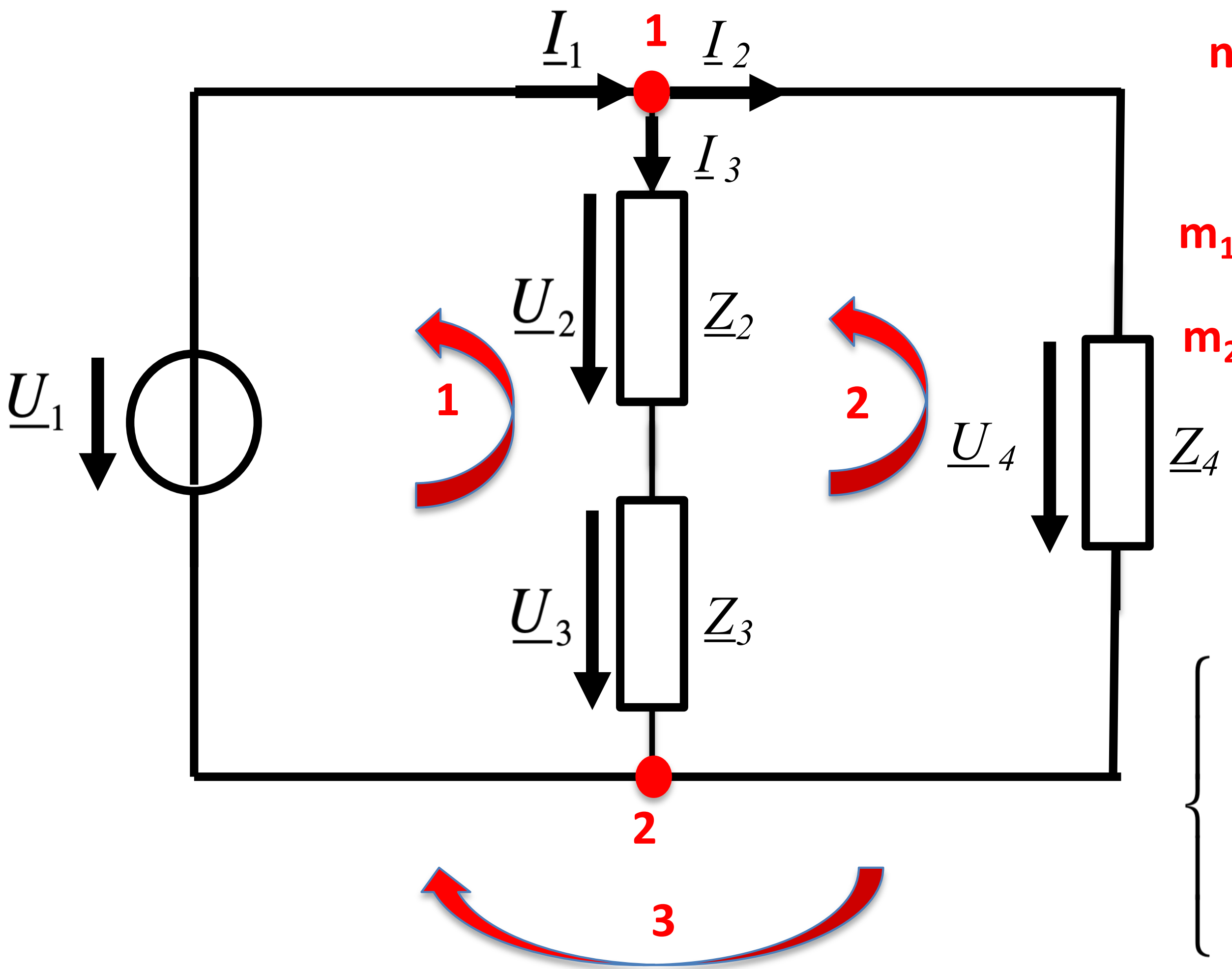


Les lois de Kirchhoff

- En régime sinusoïdal, l'introduction du concept d'impédance permet de généraliser la loi de Kirchhoff pour tous les circuits contenant des éléments linéaires résistifs, inductifs, et capacitifs.

$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} \rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{\forall i} \underline{U}_i = 0 & \text{Pour M-1 mailles} \\ \sum\limits_{\forall j} \underline{I}_j = 0 & \text{Pour N-1 nœuds} \end{cases}$$

Les lois de Kirchhoff



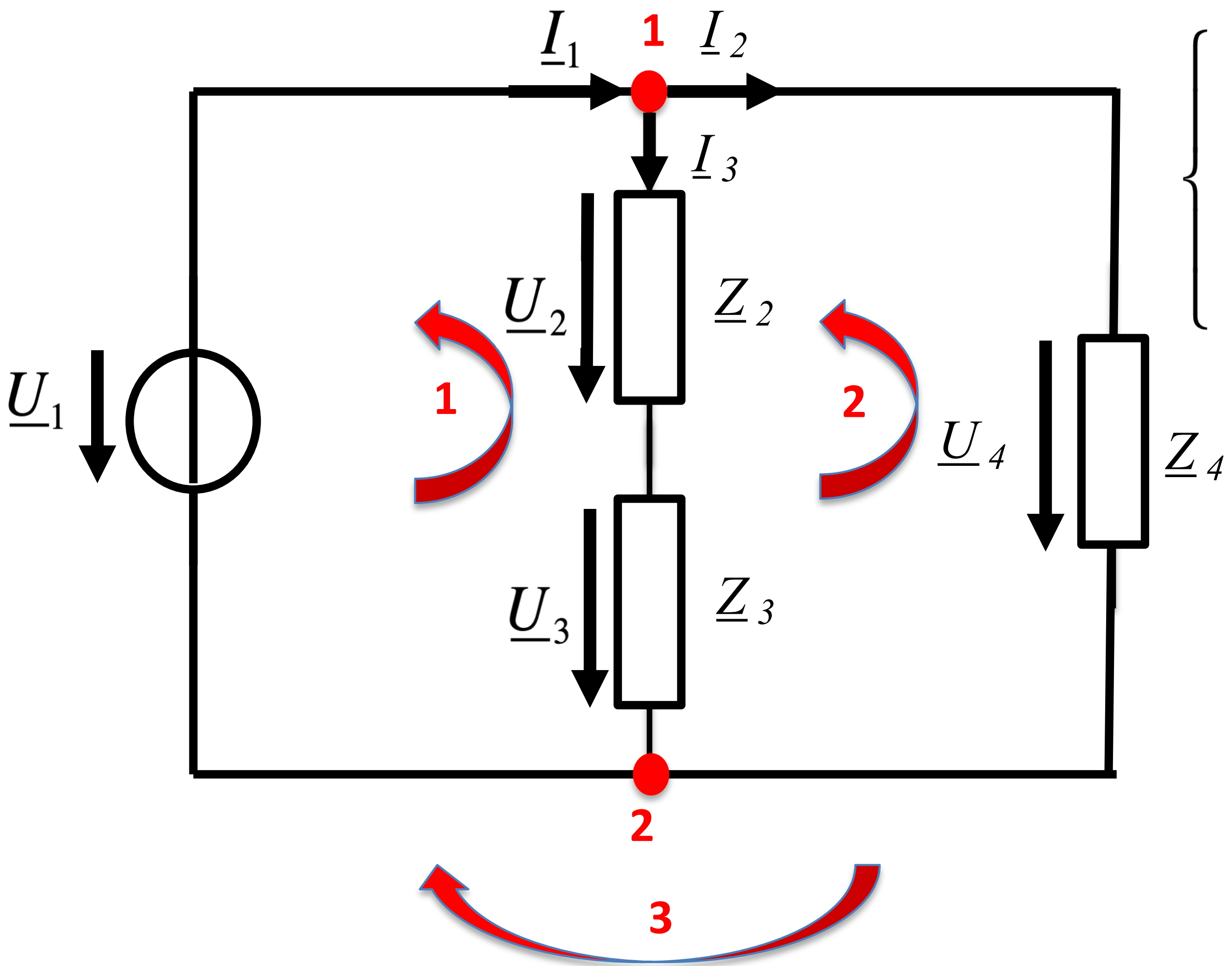
n₁: $\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0$

$$\begin{cases} m_1: & \underline{U}_1 - \underline{U}_3 - \underline{U}_2 = 0 \\ m_2: & \underline{U}_2 + \underline{U}_3 - \underline{U}_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0 \\ \underline{U}_1 - \underline{Z}_3 \underline{I}_3 - \underline{Z}_2 \underline{I}_3 = 0 \\ \underline{Z}_2 \underline{I}_3 + \underline{Z}_3 \underline{I}_3 - \underline{Z}_4 \underline{I}_2 = 0 \end{cases}$$

Trois inconnues et trois équations!

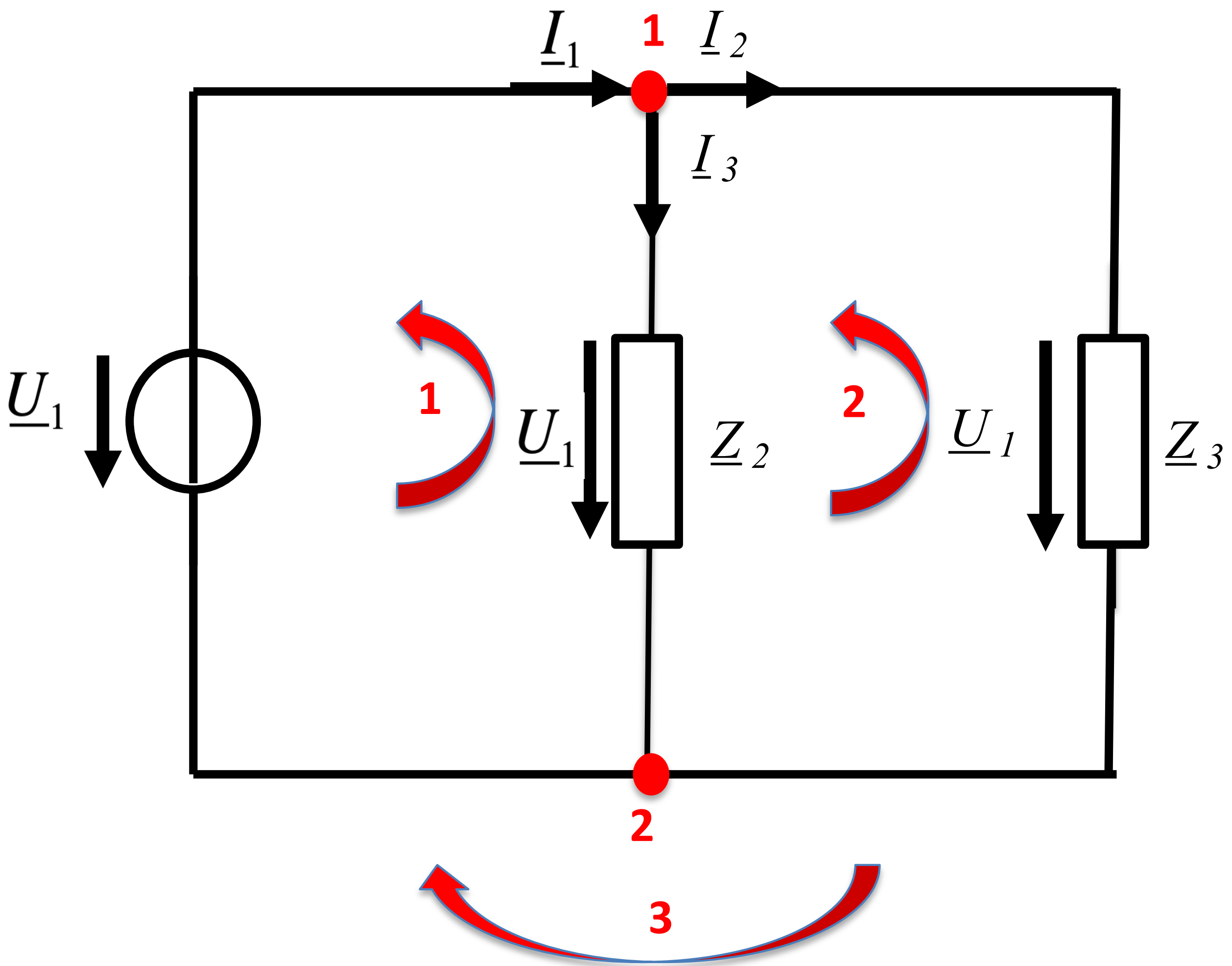
Impédance en série



$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0 \\ \underline{U}_1 - \underline{Z}_3\underline{I}_3 - \underline{Z}_2\underline{I}_3 = 0 \\ \underline{Z}_2\underline{I}_3 + \underline{Z}_3\underline{I}_3 - \underline{Z}_4\underline{I}_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underline{Z}_S = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2$$

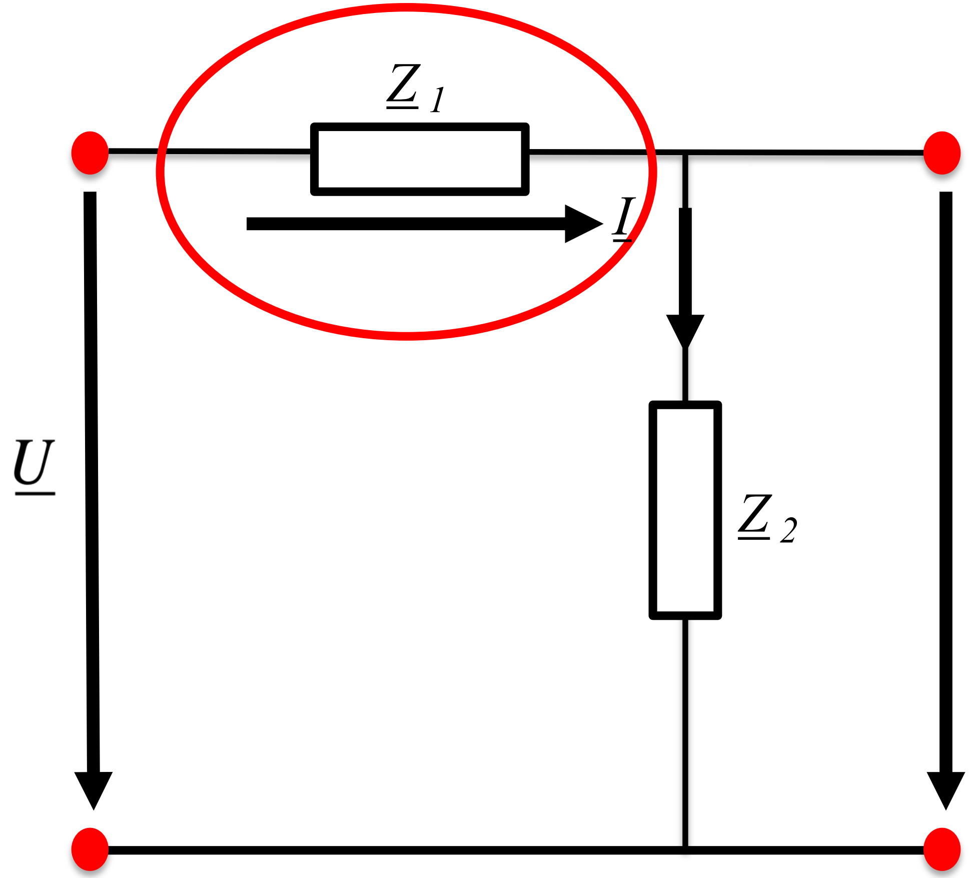
Impédance en parallèle



$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_P} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_3}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_P} = \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}$$

Diviseur de Tension

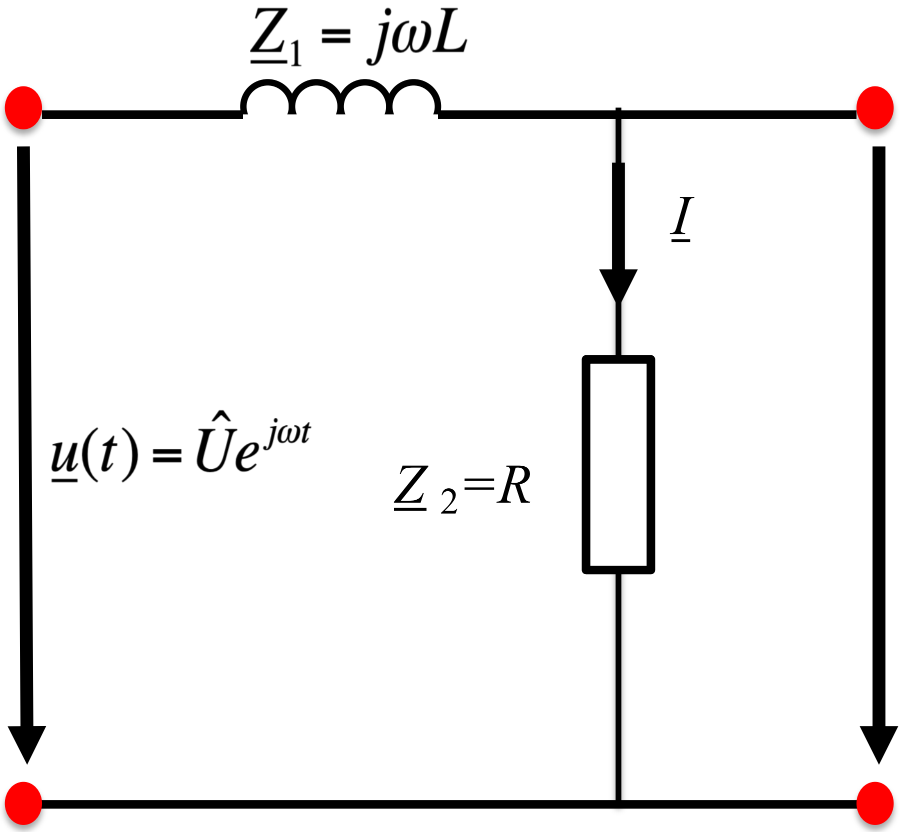


$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}$$

Commentaire: la tension partielle aux bornes de l'autre impédance est: $\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}$
(On l'appelle aussi « tension de sortie »)

Diviseur de Tension LR



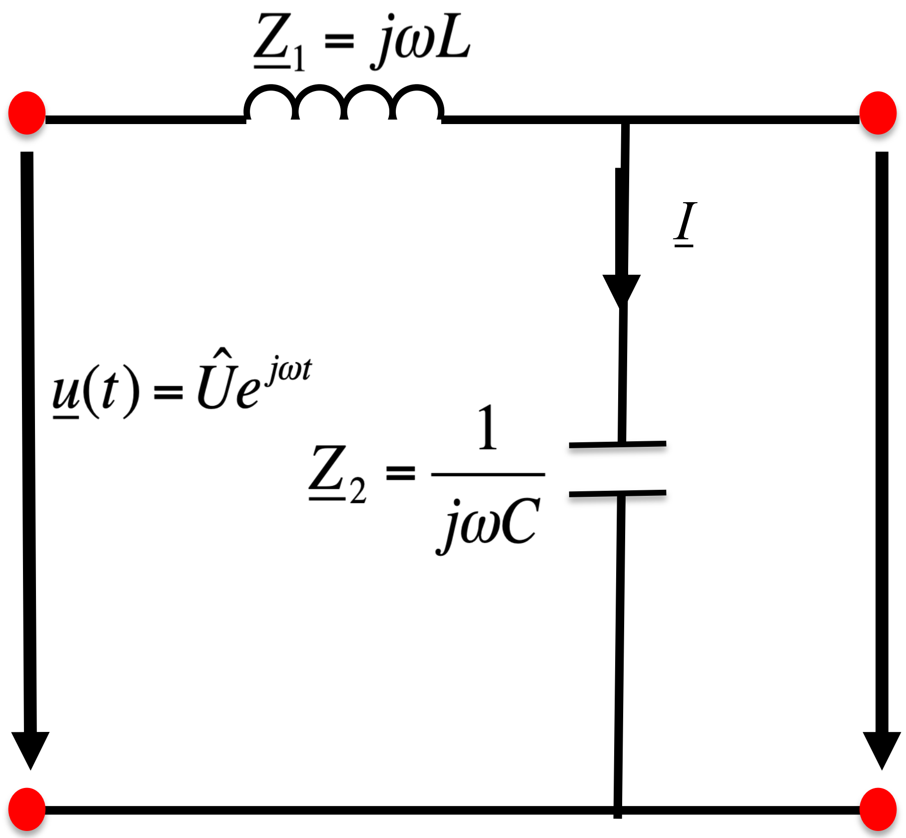
$$\underline{u}_2 = \hat{U}_2 e^{j\omega t + \varphi}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U} = \frac{R}{j\omega L + R}\underline{U}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{R}{R + j\omega L} \cdot \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L}\underline{U}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{R^2 - j\omega RL}{R^2 + \omega^2 L^2}\underline{U} \qquad \rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Diviseur de Tension LC



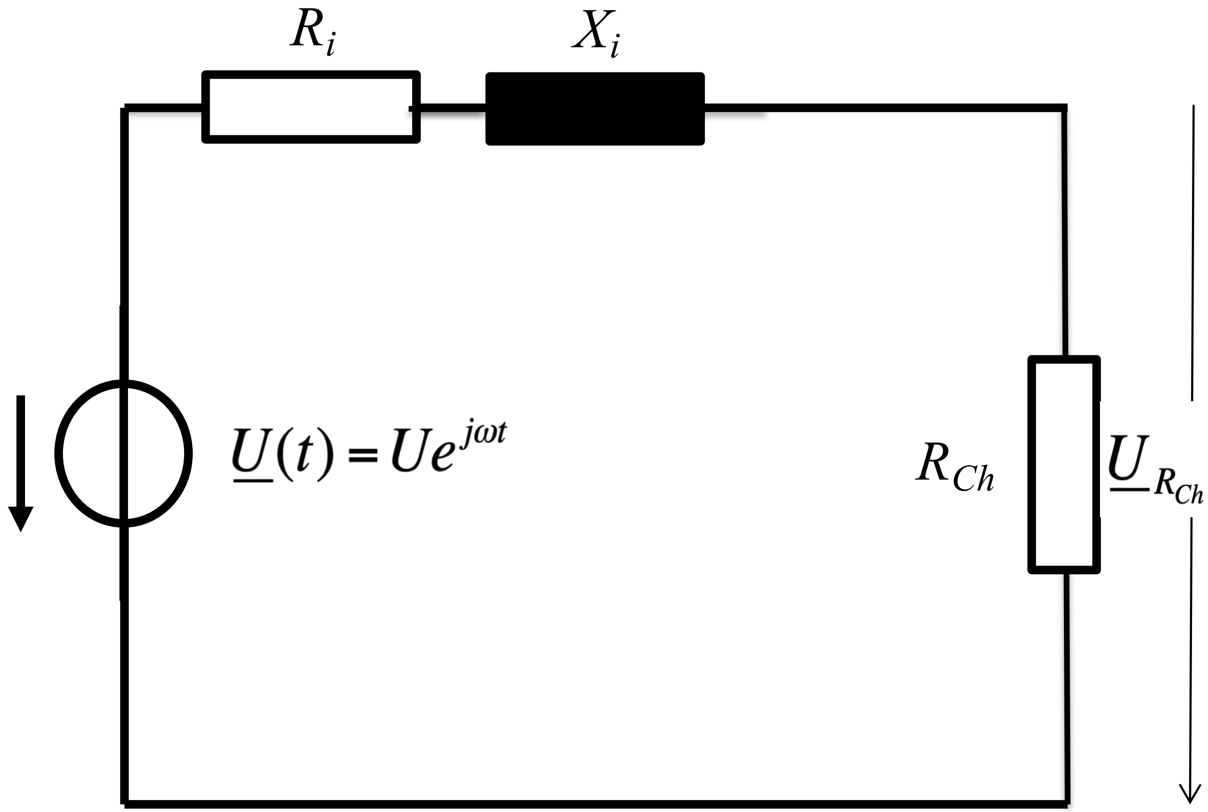
$$\underline{u}_2 = \hat{U}_2 e^{j\omega t + \varphi}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U} = \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}}\underline{U}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{-\omega^2 LC + 1}\underline{U}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{1 - \omega^2 LC}\underline{U} \quad \rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{0}{1 - \omega^2 LC}\right) = 0$$

Source de tension avec impédance interne



$$\underline{U}_{R_{Ch}} = U_{Ch} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$\varphi \neq 0$ **?**

Diviseur de Tension $\underline{U}_2 = \dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U} \Rightarrow \underline{U}_{Ch} = \dfrac{R_{Ch}}{R_i + jX_i + R_{Ch}} \underline{U}$

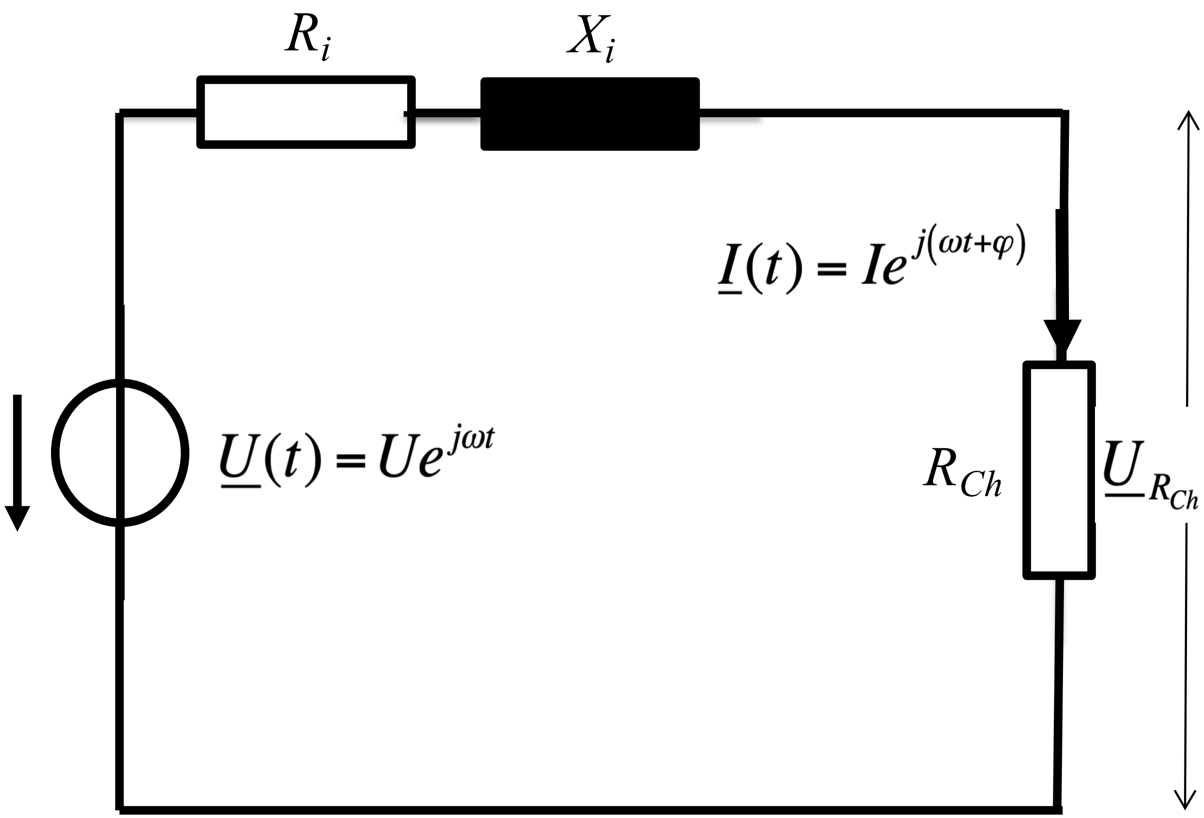
Le déphasage de la tension fournis par rapport a la tension interne

$$\underline{U}_{Ch} = \frac{R_{Ch}}{R_i + jX_i + R_{Ch}}\underline{U} = \frac{R_{Ch}}{R_i + R_{Ch} + jX_i}\underline{U}$$

$$\frac{1}{R_i + R_{Ch} + jX_i} = \frac{1}{R_i + R_{Ch} + jX_i} \cdot \frac{R_i + R_{Ch} - jX_i}{R_i + R_{Ch} - jX_i} = \frac{R_i + R_{Ch}}{\left(R_i + R_{Ch}\right)^2 + X_i^2} - j\frac{X_i}{\left(R_i + R_{Ch}\right)^2 + X_i^2}$$

$$\underline{U}_{Ch} = \left(\frac{R_{Ch}(R_i + R_{Ch})}{\left(R_i + R_{Ch}\right)^2 + X_i^2} - j\frac{R_{Ch}X_i}{\left(R_i + R_{Ch}\right)^2 + X_i^2}\right)\underline{U} \rightarrow tg(\varphi) = -\frac{X_i}{R_i + R_{Ch}}$$

Source de tension avec impédance interne



$$\underline{U}_{R_{Ch}} = U_{Ch}e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$\varphi \neq 0$ **!**

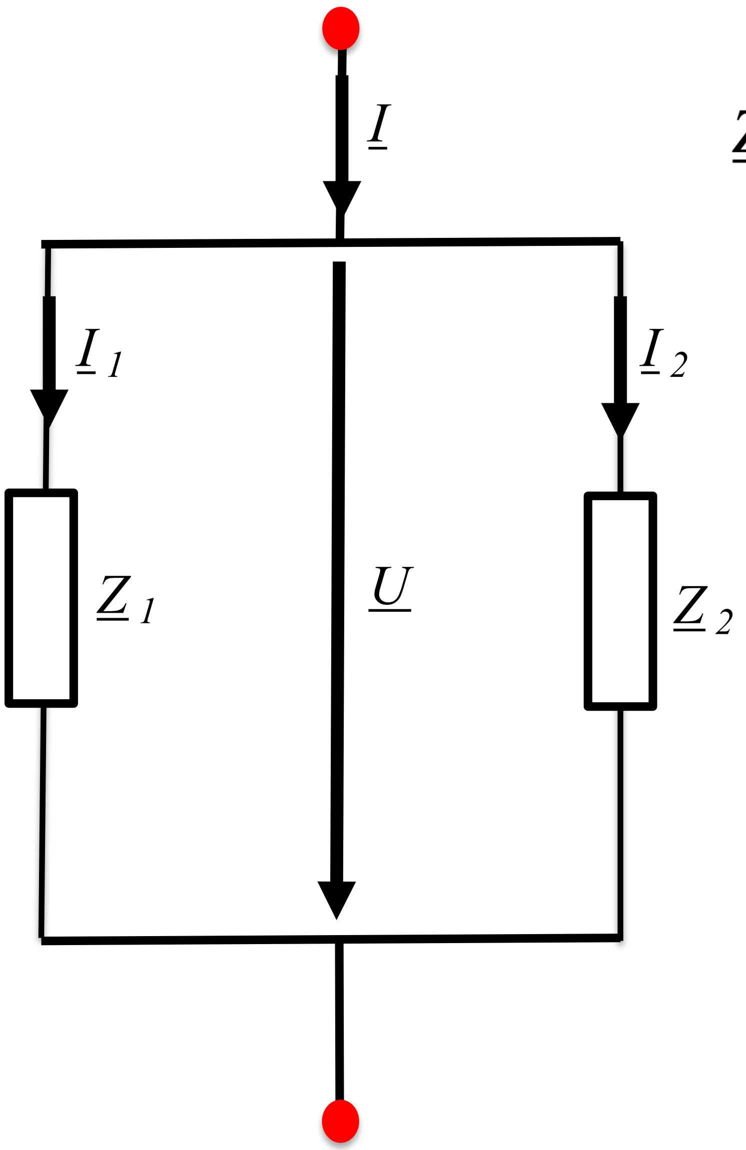
$$\underline{U}_{Ch} = \frac{R_{Ch}}{R_i + jX_i + R_{Ch}}\underline{U} \rightarrow tg(\varphi) = -\frac{X_i}{R_i + R_{Ch}}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R_i + jX_i + R_{Ch}} \rightarrow tg(\varphi) = -\frac{X_i}{R_i + R_{Ch}}$$

Le même déphasage!!!

Diviseur de Courant

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I}$$

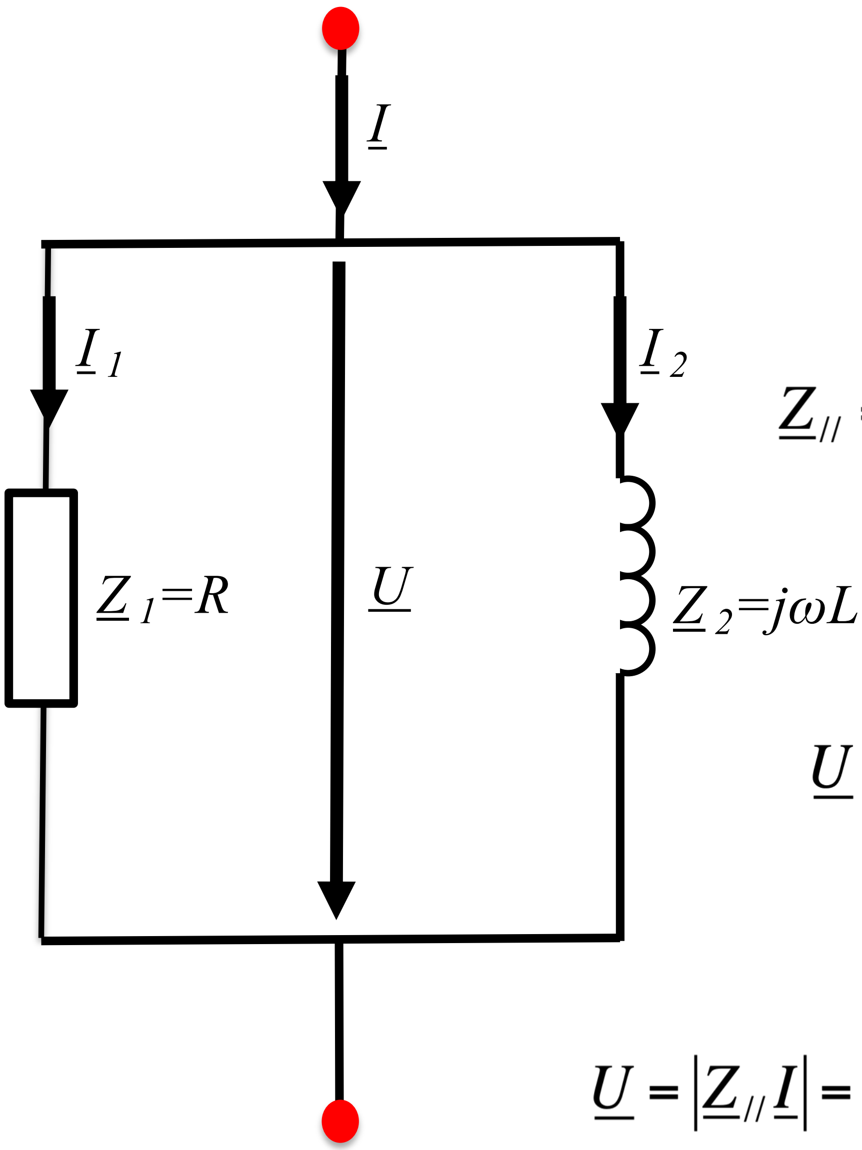


$$\underline{Z}_{//} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_{//}\underline{I}}{\underline{Z}_2}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I}$$

RL en Parallèle

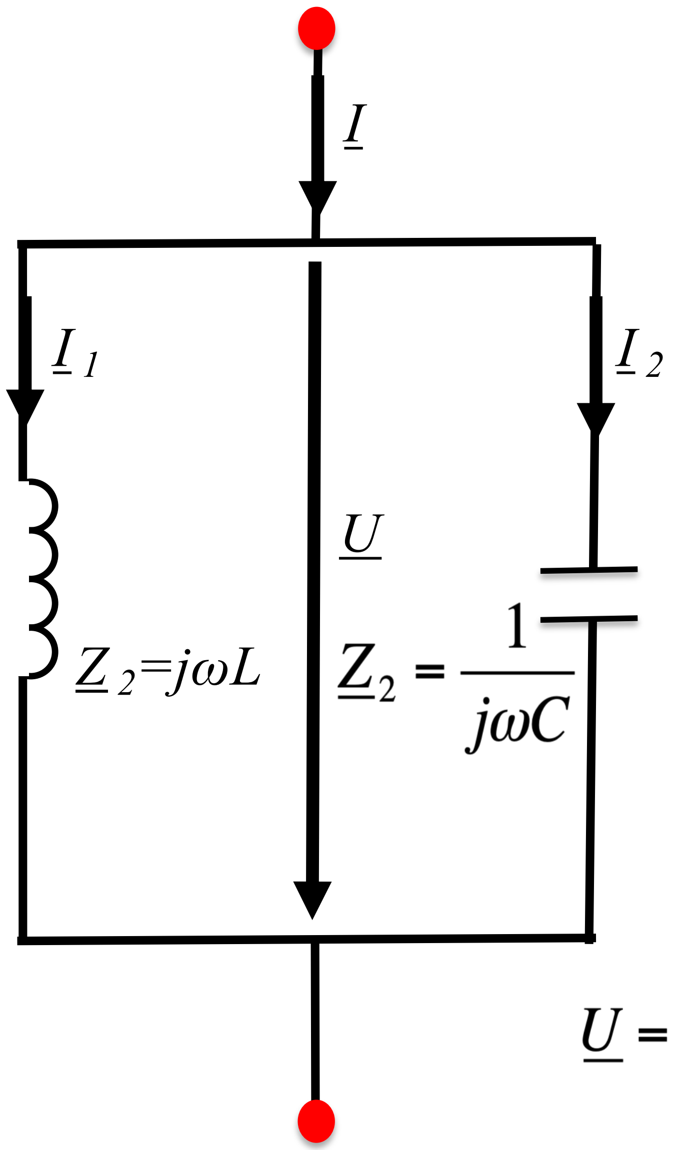


$$\underline{Z}_{//} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{j\omega RL}{R + j\omega L}$$

$$\underline{U} = \underline{Z}_{//}\underline{I} = \frac{j\omega RL}{R + j\omega L}\underline{I}$$

$$U = \left|\underline{Z}_{//}\underline{I}\right| = \frac{\omega RL}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\underline{I}\begin{cases} \xrightarrow{\omega \to 0} 0 \\ \xrightarrow{\omega \to \infty} R\hat{I} \end{cases}$$

LC en Parallèle

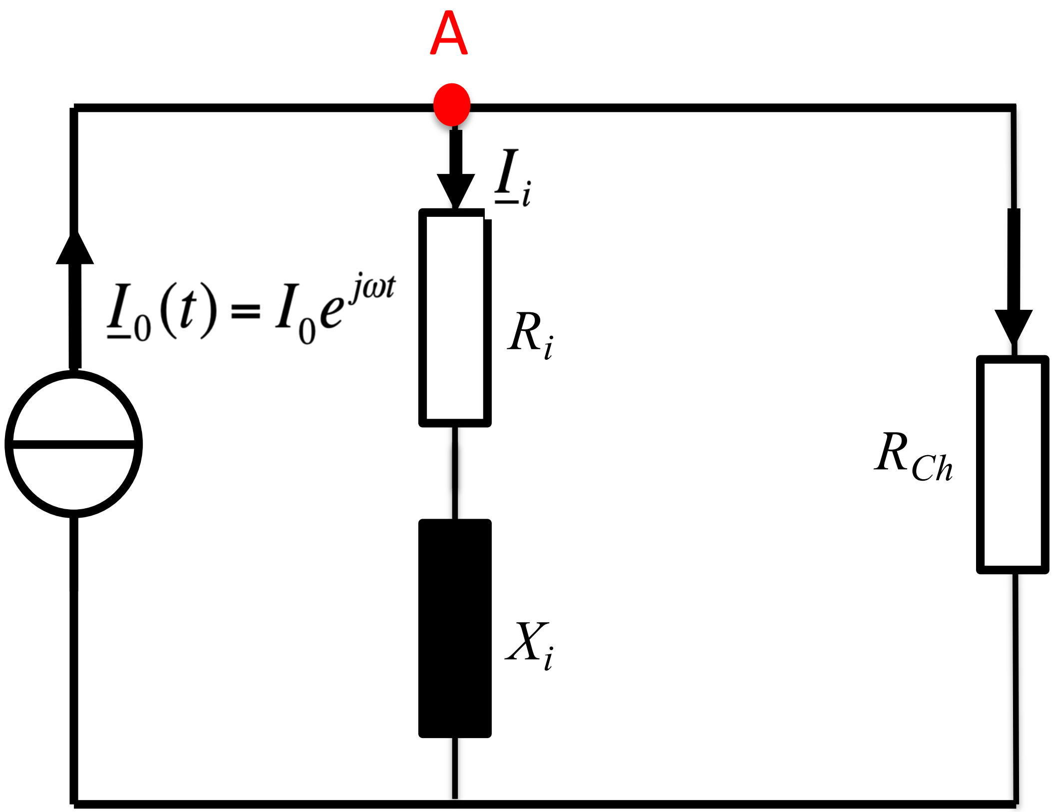


$$\underline{Z}_{//} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\dfrac{j\omega L}{j\omega C}}{j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}}$$

$$\underline{U} = \underline{Z}_{//}\underline{I} = \frac{j\omega L}{-\omega^2 LC + 1}\underline{I}$$

$$\underline{U} = \left|\underline{Z}_{//}\underline{I}\right| = \frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\underline{I} \begin{cases} \xrightarrow{\omega \to 0} 0 \\ \xrightarrow{\omega \to 1/\sqrt{LC}} \infty \\ \xrightarrow{\omega \to \infty} 0 \end{cases}$$

Source du courant avec impédance interne



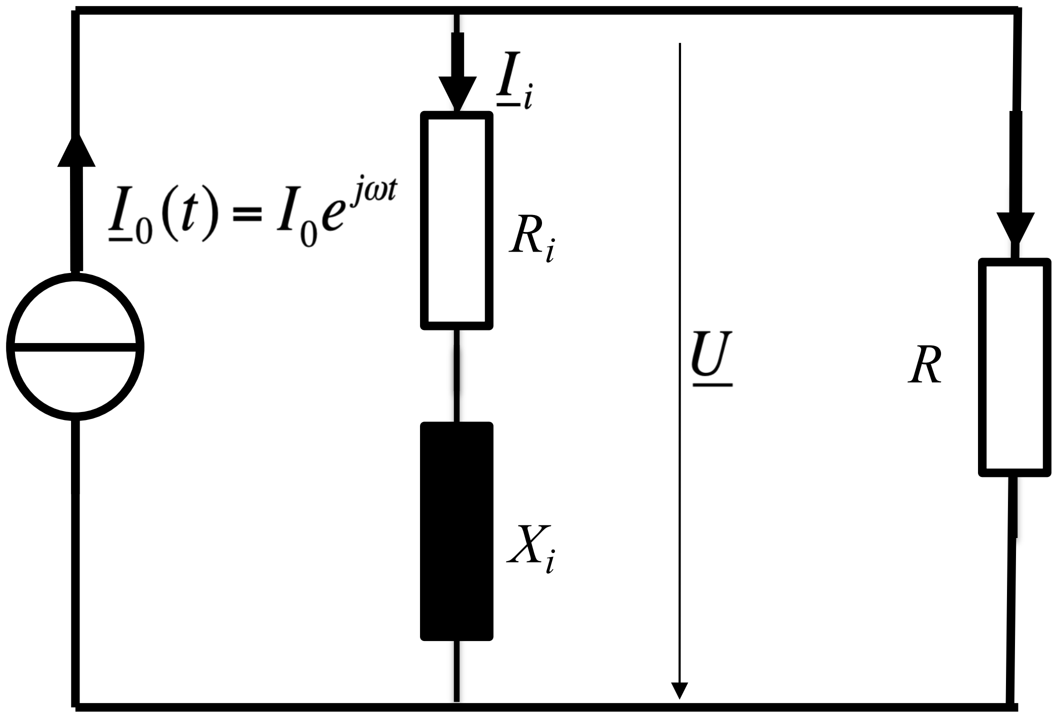
$$\underline{I}_{Ch} = I_{Ch} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Diviseur de Courant

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}$$

$$\underline{I}_{Ch} = \frac{R_i + jX_i}{R_i + jX_i + R_{Ch}} \underline{I}_0$$

Source du courant avec impédance interne



$$\underline{I}_{Ch} = \frac{\underline{U}}{\underline{\underline{R}}} = I_{Ch} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$\varphi \neq 0$!

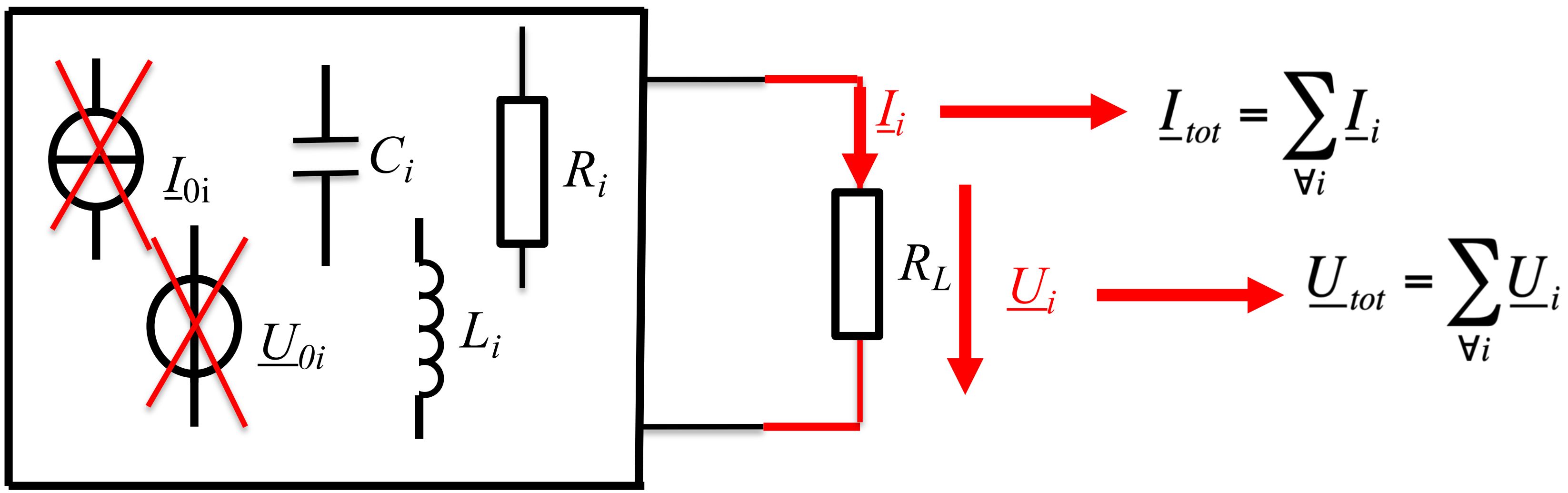
$$R = R_{Ch}$$

$$\underline{I}_{Ch} = \frac{\underline{Z}_i}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_{Ch}} \underline{I}_0$$

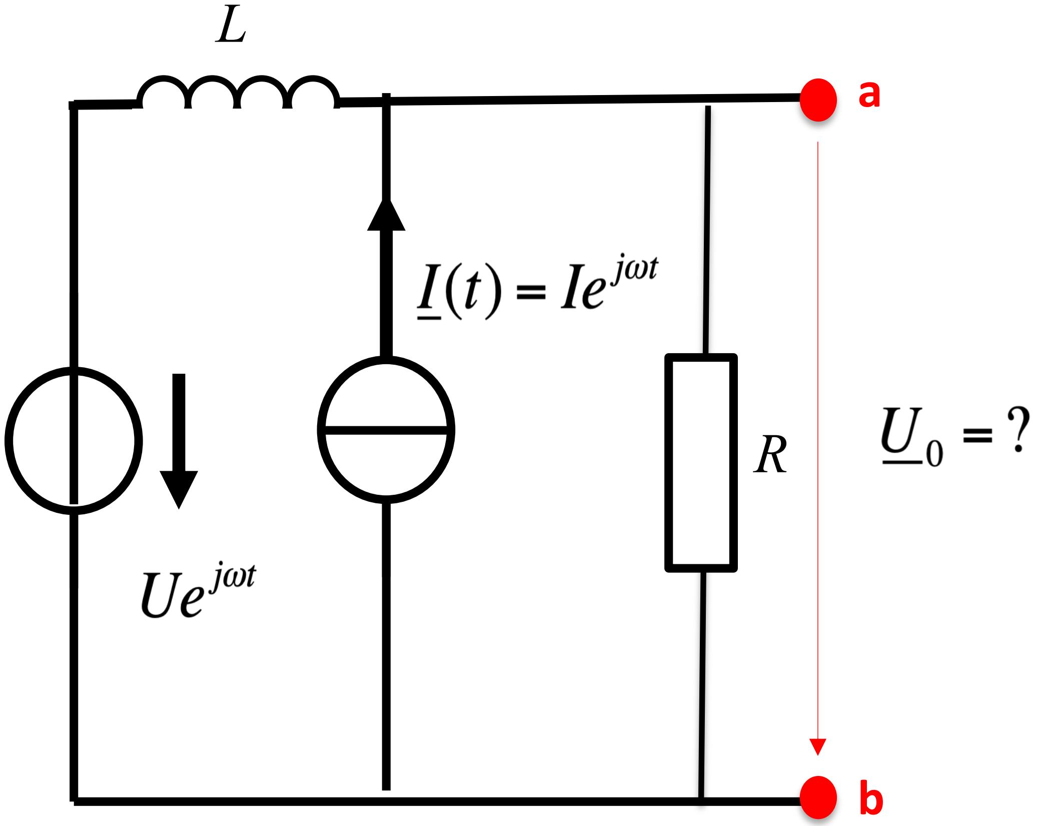
$$\underline{I}_{Ch} = \frac{R_i + jX_i}{R + R_i + jX_i} \underline{I}_0 \cdot \frac{R + R_i - jX_i}{R + R_i - jX_i} = \frac{R_i\left(R + R_i\right) + X_i^2}{\left(R + R_i\right)^2 + X_i^2} \underline{I}_0 + j \frac{X_i\left(R + R_i\right) - R_i X_i}{\left(R + R_i\right)^2 + X_i^2} \underline{I}_0$$

Principe de Superposition

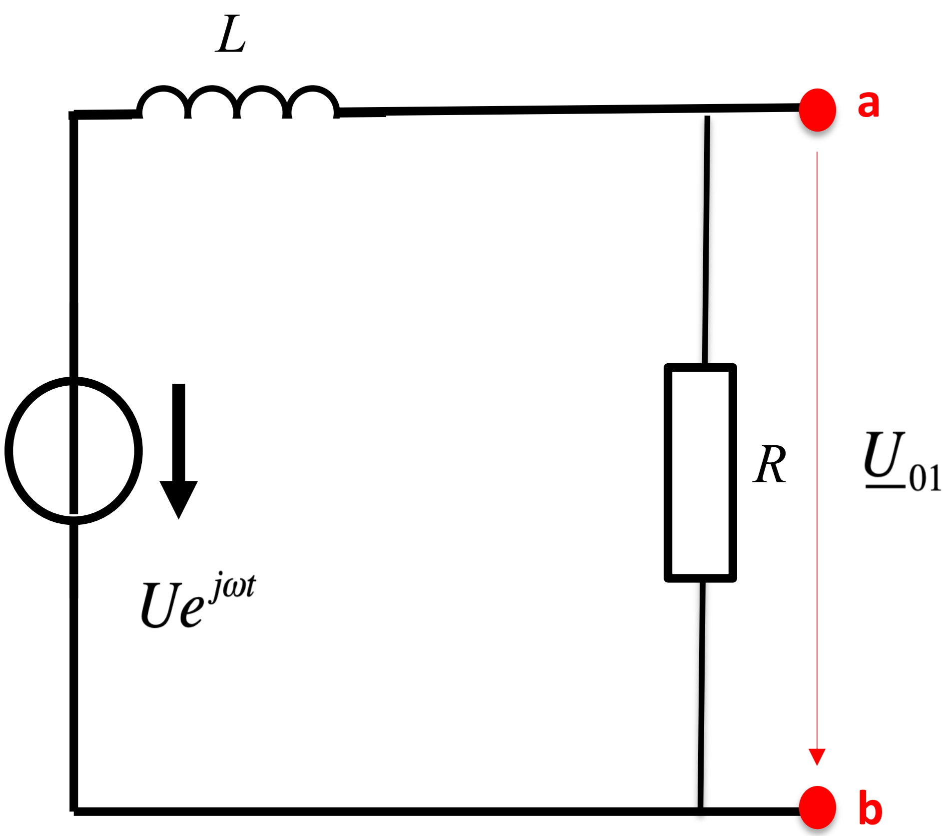
- Si toutes les sources ont une même fréquence, alors on considère successivement chaque source isolée et le courant définitif est la somme vectorielle des contributions individuelles



Exemple pour Superposition



Exemple pour Superposition



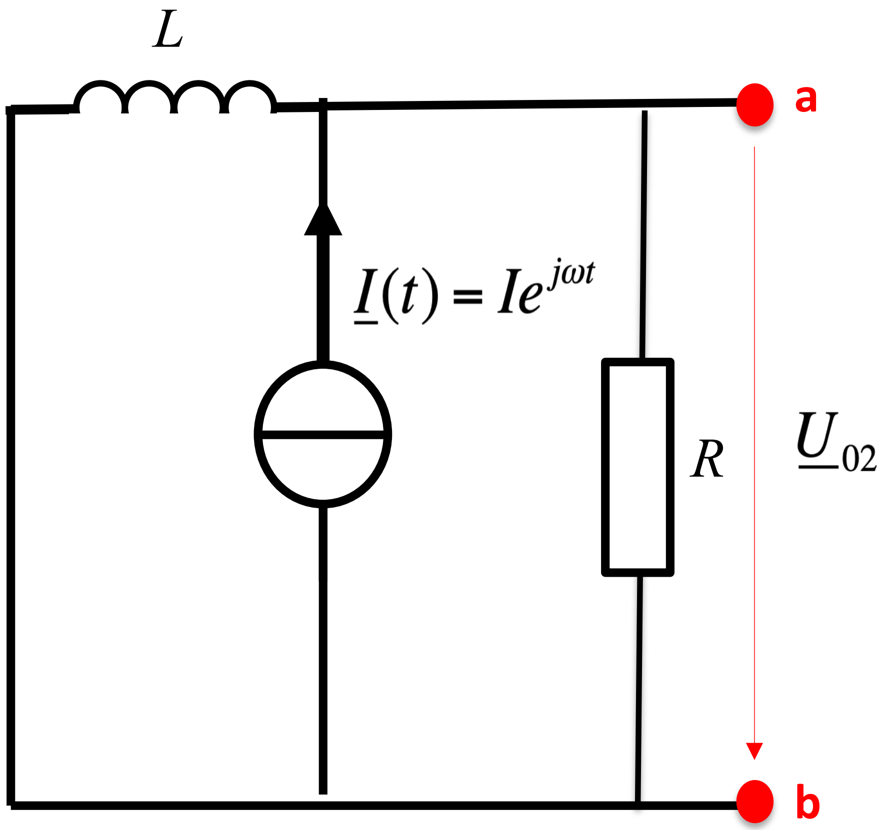
Première générateur

Diviseur de Tension

$$\underline{U}_{01} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L}\underline{U}$$

$$\underline{U}_{01} = \frac{R}{R + j\omega L}\underline{U}$$

Exemple pour Superposition



Deuxième générateur

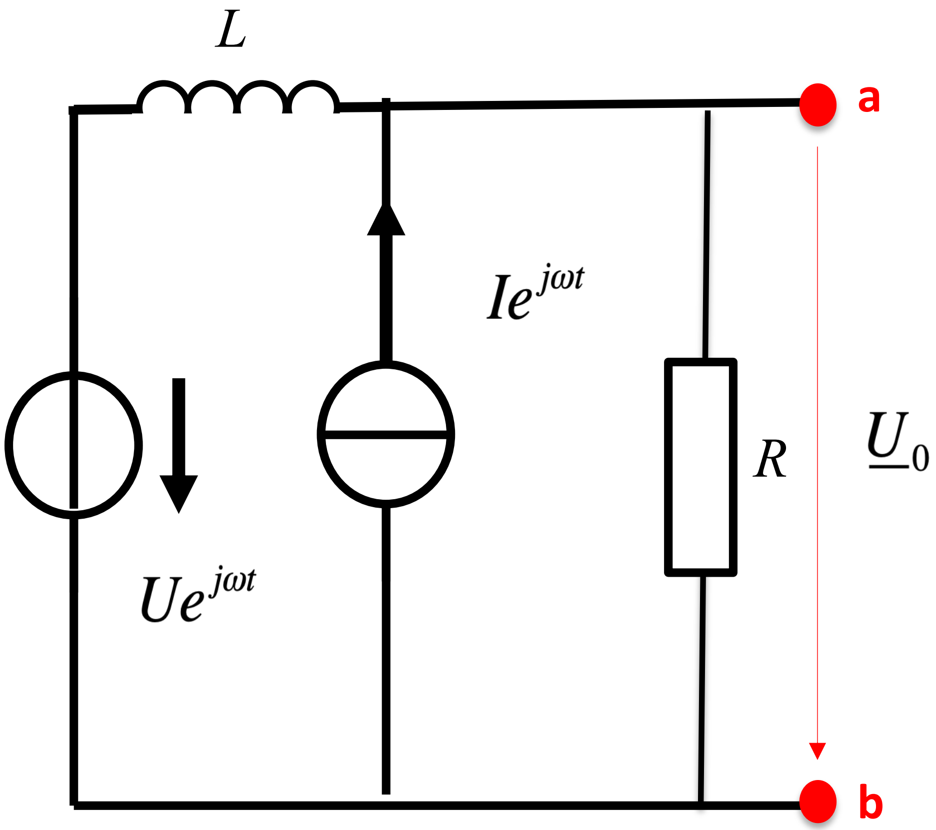
Diviseur de Courant

$$\underline{U}_{02} = \underline{Z}_{//}\underline{I}$$

$$\underline{Z}_{//} = \frac{j\omega RL}{j\omega L + R}$$

$$\underline{U}_{02} = \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} \cdot \underline{I}$$

Exemple pour Superposition



Les deux ensembles

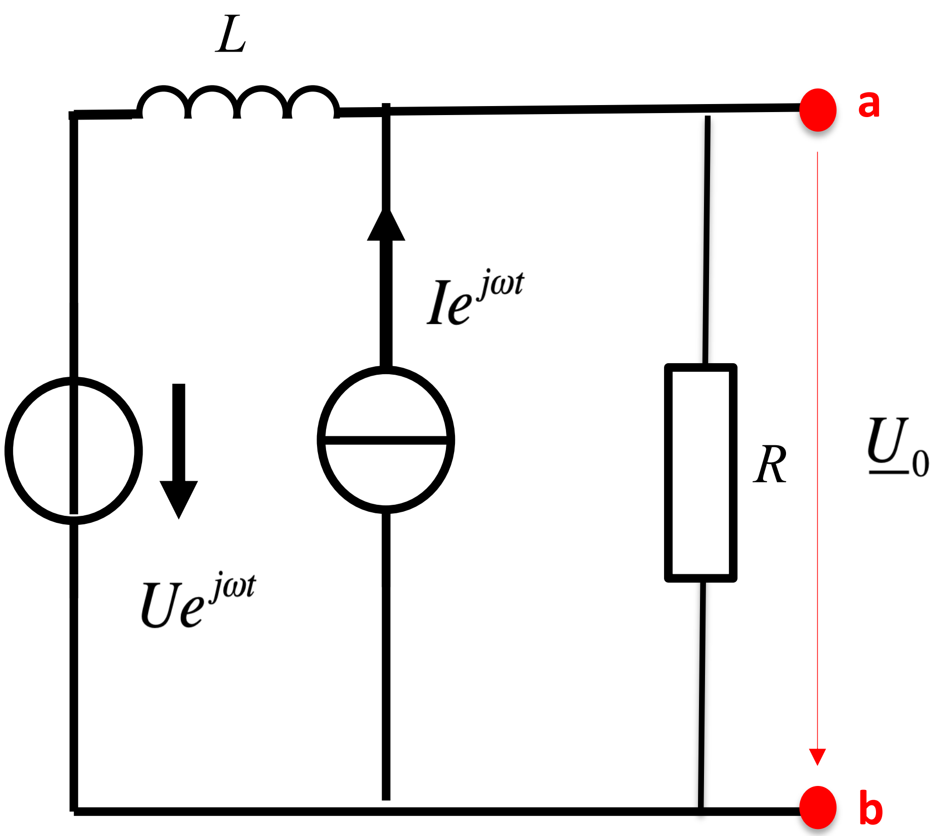
$$\underline{U}_0 = \underline{U}_{01} + \underline{U}_{02}$$

$$\underline{U}_{01} = \frac{R}{R + j\omega L}\underline{U}$$

$$\underline{U}_{02} = \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} \cdot \underline{I}$$

$$\underline{U}_0 = \frac{R}{R + j\omega L}Ue^{j\omega t} + \frac{j\omega RL}{R + j\omega L}Ie^{j\omega t} = \frac{RU + j\omega RLI}{R + j\omega L}e^{j\omega t}$$

Exemple pour Superposition



Les deux ensembles

$$\underline{U}_0 = \frac{RU + j\omega RLI}{R + j\omega L} e^{j\omega t}$$

$$\underline{U}_0 = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\arg(\underline{U}_0) = \arg(RU + j\omega RLI) - \arg(R + j\omega L)$$

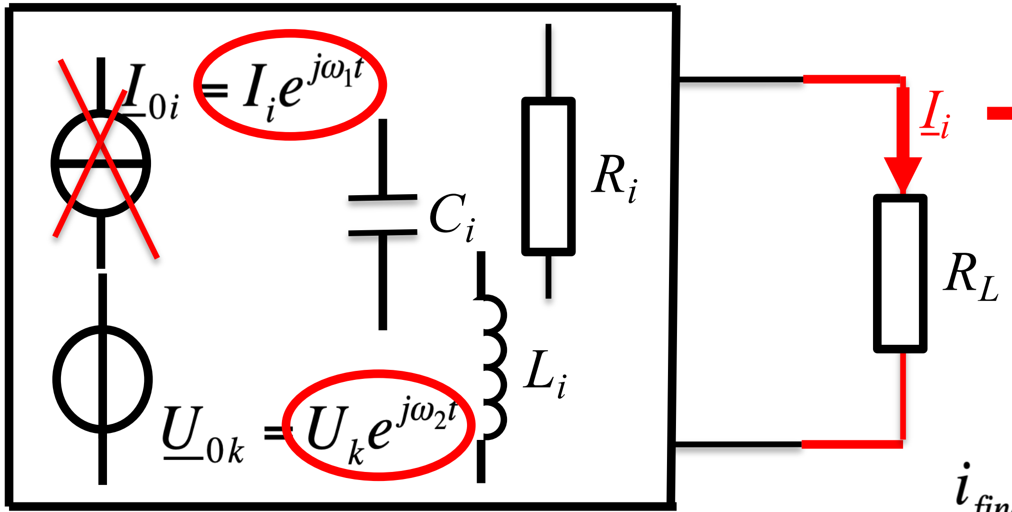
$$\varphi = \arg(\underline{U}_0) = arctg\left(\frac{\omega LI}{U}\right) - arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$U_0 = |\underline{U}_0| = \frac{|RU + j\omega RLI|}{|R + j\omega L|} |e^{j\omega t}|$$

$$U_0 = \frac{\sqrt{(RU)^2 + (\omega RLI)^2}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Principe de Superposition

- Si les sources ont différentes fréquences, alors on traitera le problème par groupes de fréquences égales



$$\begin{cases} I_{tot-1}e^{j(\omega_1 t+\alpha_1)} = \sum\limits_{\forall i} I_i e^{j\omega_1 t+\alpha_i} \\ I_{tot-2}e^{j(\omega_2 t+\alpha_2)} = \sum\limits_{\forall k} I_k e^{j\omega_2 t+\alpha_k} \end{cases}$$

$$i_{final}(t) = \mathrm{Re}\{\hat{I}_{tot-1}e^{j(\omega_1 t+\alpha_1)} + \hat{I}_{tot-2}e^{j(\omega_2 t+\alpha_2)}\}$$

Description .

- ❑ Aujourd'hui
  - ❑ Lois d'Ohm
  - ❑ Lois de Kirchhoff
  - ❑ Impédances en série et parallèle
  - ❑ Diviseurs de tension et de courant
  - ❑ Principe de superposition
  - ❑ Sections 7.1,7.2, 7.4
- ❑ Semaine prochaine
  - ❑ Les Filtres
  - ❑ comportement fréquentiel
  - ❑ Sections 7.3, 9.1, 9.2

A lire